

# 1. ロボットの運動学 (Robot kinematics)

## 1.1 自由度と関節 (Degree of freedom and joint)

ロボットマニピュレータ(robot manipulator)の基本的構造は Fig.1 に示すように、複数のリンク(link)をジョイント(joint)で結合したものである。ロボットの持っている関節の数、すなわち 2 つのリンクを相対的に自由に動かさしめる機構の数を自由度(degree of freedom)と呼ぶ。

ロボットの動作を制御するとき最も重要なことは、先端にあるハンド(hand)や作業ツールなどのエンドエフェクタ(end effector)の位置および制御と、対象物との空間的な幾何学関係を記述し、そこへ行くために各ジョイントの変位や角度をどのような値にすればよいかを求めることである。この問題を取り扱う理論をロボット運動学(robot kinematics)という。

さらに、ロボットのエンドエフェクタを所定の速度や軌道で動かしたり、動的な力や加速度を発生させたりするような場合には、運動学をもとにしたロボット動力学(robot dynamics)が用いられる。

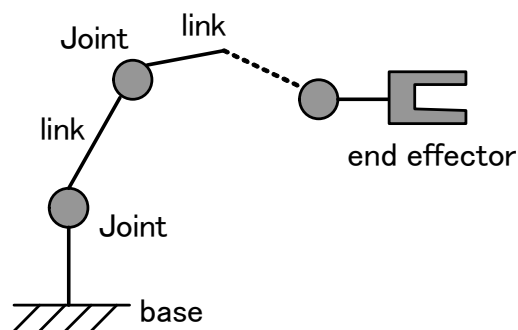


Fig.1 ロボットマニピュレータの構造

## 1.2 マニピュレータの座標系表現

一般にマニピュレータの制御では、リンクの先端に取り付けたエンドエフェクタの位置と姿勢が問題となる。エンドエフェクタの中心が3次元空間のある1点(X,Y,Z)にあり、ある方向( $\phi, \theta, \eta$ )を向いているとする。このときの位置姿勢をポーズ(pose)といい、ポーズは3つの座標とその座標の回転で表現される。

## 1.3 エンドエフェクタの姿勢表現

エンドエフェクタの姿勢は、エンドエフェクタの中心を原点とする直交座標系における3つの回転角度で表現される。この回転の表現方法として「オイラー角」表現と「ロール・ピッチ・ヨー」表現がある。

### (a) オイラー角 (Euler angles)

Fig.2 に示すように、z 軸回りに  $\phi$ 、次に回転後の y 軸回りに  $\theta$ 、さらに回転後の z 軸回りに  $\psi$  回転した結果の姿勢を表している。

### (b) ロール・ピッチ・ヨー (roll-pitch-yaw)

Fig.3 に示すように、x 軸回りの回転運動の角度をロール角(roll angle), y 軸回りの上下振り角度をピッチ角(pitch angle), z 軸回りの左右振りの角度をヨー角(yaw angle)と呼び、回転した結果の姿勢を表している。

これはもともと船の揺れを表す用語で、船首に向かって左右の揺れがロール、前後方向の縦揺れがピッチ、船首が左右に振れるのがヨーである。

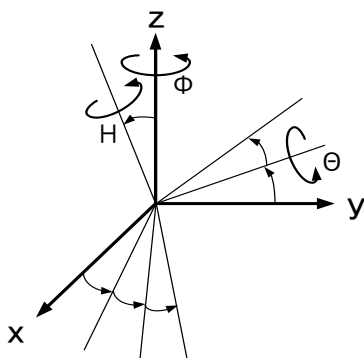


Fig.2 オイラー角表現

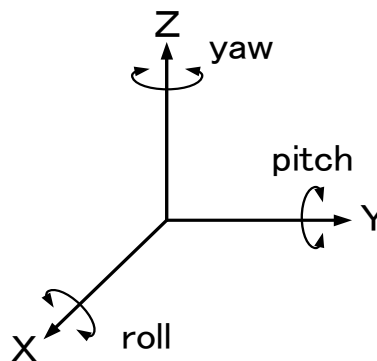


Fig.3 ロール・ピッチ・ヨー表現

## 1.4 座標系の表現と変換

物体が空間のある位置にあるとき、物体の適当な端点を原点とし適当な方向を定めた3次元の座標系が定義できる。これを座標系(coordinate system)と呼ぶ。

### 1.4.1 回転行列 (rotation matrix)

ジョイント(joint)の運動で回転や旋回による座標変換を表現するために、**回転行列(rotation matrix)**が用いられる。Fig.4 に示すように、座標系  $(x_0, y_0, z_0)$  を  $z_0$  軸回りに角度  $\theta$  だけ回転させたものを座標系  $(x_1, y_1, z_1)$  として、座標間の方向余弦を求める。

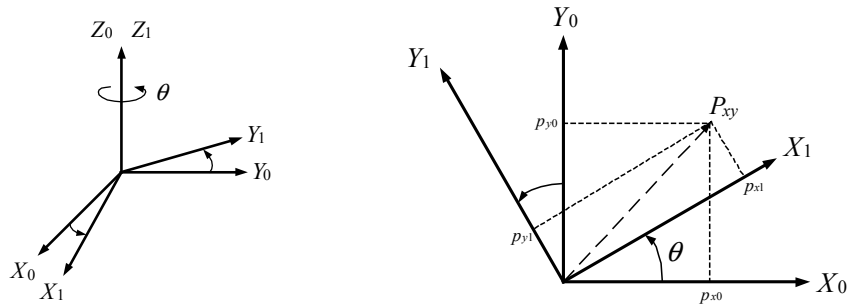


Fig.4 Z 軸回りの回転行列変換

座標軸  $x_1$  上の単位ベクトルの

$$\left. \begin{aligned} x_0 \text{ 方向の成分は } R_{11} &= \cos \theta \\ y_0 \text{ 方向の成分は } R_{21} &= \sin \theta \\ z_0 \text{ 方向の成分は } R_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} (1.1)$$

座標軸  $y_1$  上の単位ベクトルの

$$\left. \begin{aligned} x_0 \text{ 方向の成分は } R_{12} &= -\sin \theta \\ y_0 \text{ 方向の成分は } R_{22} &= \cos \theta \\ z_0 \text{ 方向の成分は } R_{32} &= 0 \end{aligned} \right\} (1.2)$$

座標軸  $z_1$  上の単位ベクトルの

$$\left. \begin{aligned} x_0 \text{ 方向の成分は } R_{13} &= 0 \\ y_0 \text{ 方向の成分は } R_{23} &= 0 \\ z_0 \text{ 方向の成分は } R_{33} &= 1 \end{aligned} \right\} (1.3)$$

したがって、座標系  $(x_1, y_1, z_1)$  における座標が  $(P_{x1}, P_{y1}, P_{z1})$ 、座標系  $(x_0, y_0, z_0)$  における座標を  $(P_{x0}, P_{y0}, P_{z0})$  とすれば、式(1.1)から(1.3)より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_{x0} \\ P_{y0} \\ P_{z0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このとき、

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

を回転行列(rotation matrix)という。

### 1.4.2 並進行列

次に平行移動における関係を示す。Fig.5 に示したように  $x$  軸方向へ  $p_x$ 、 $y$  軸方向へ  $p_y$ 、 $z$  軸方向へ  $p_z$  の平行移動は

$$T \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

で表される。

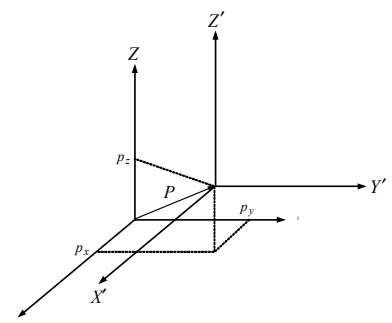


Fig.5 並進座標変換

### 1.4.3 同次変換行列 (homogeneous transformation)

通常の変換は回転と並進の組み合わせで実現されている。Fig.6 でのベクトル  $T$  は  $O$  座標系での原点  $O_h$  の位置を表すベクトル(並進行列)である。最終的に求めたい値は、ベース(base)の  $O$  座標系におけるエンドエフェクタの位置  $(P_{x0}, P_{y0}, P_{z0})$  であるので、各座標系のベクトルを  $O$  座標系で表現しなければならない。これを式で表すと次式ようになる。

$$\begin{bmatrix} P_{x0} \\ P_{y0} \\ P_{z0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{xh} \\ P_{yh} \\ P_{zh} \\ 1 \end{bmatrix}$$

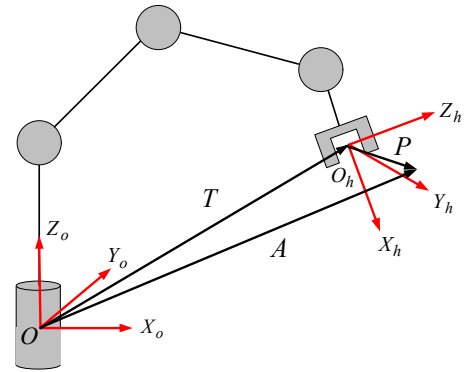


Fig.6 エンドエフェクタの位置と姿勢

このとき、

$$A = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の  $4 \times 4$  の座標変換行列を同次変換行列(homogeneous transformation)という。

### 1.5 順運動学 (forward kinematics)

順運動学(forward kinematics)とは、ロボットマニピュレータの各関節の変位と角度を与えて、エンドエフェクタの位置と姿勢を求める問題を扱うことである。この解析を行うためには、ロボットマニピュレータの変位とその先端の位置との関係を数式で表現する必要があり、そのために**回転行列**、および**並進と回転の変換行列(同次変換行列)**による表現などが用いられる。

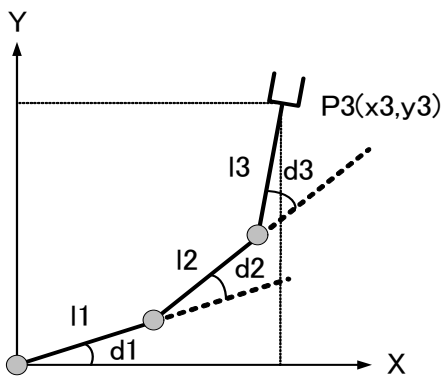


Fig.7 3自由度ロボットアーム

#### 例題

Fig.7 に示すようなリンク長  $l1, l2, l3$  の関節ロボットアームにおいて、ジョイント(J1, J2, J3)の角度  $(d1, d2, d3)$  の変位からエンドエフェクタの位置  $P3(x3, y3)$  の位置を求めよ。また、各パラメータを適当に値を代入し、MATLAB で関節ロボットアームの外形を出力せよ。

#### 解答

X-Y 座標を原点座標系(0系)とすると、0系座標系から J1 を  $d1$  だけ回転させた座標系(1系)への同次変換行列  $T_{01}$  は、

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos(d1) & -\sin(d1) & 0 & 0 \\ \sin(d1) & \cos(d1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。さらに、この1系座標系を  $l1$  だけ並進移動させて  $d2$  だけ回転させた座標系が2系座標系なので同次変換行列  $T_{12}$  は、

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos(d2) & -\sin(d2) & 0 & l1 \\ \sin(d2) & \cos(d2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同様に2系座標系から3系座標系の同次変換行列  $T_{23}$  は、

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \cos(d3) & -\sin(d3) & 0 & l2 \\ \sin(d3) & \cos(d3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と求めることができるので、0系座標系から3系座標系の同次変換行列  $T_{03}$  は、

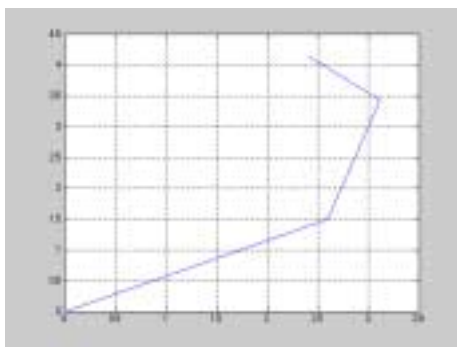
$$T_{03} = T_{01}T_{12}T_{23} = \begin{bmatrix} \cos(d1) & -\sin(d1) & 0 & 0 \\ \sin(d1) & \cos(d1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(d2) & -\sin(d2) & 0 & l1 \\ \sin(d2) & \cos(d2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(d3) & -\sin(d3) & 0 & l2 \\ \sin(d3) & \cos(d3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と表すことができる。よって、エンドエフェクタの位置  $P3(x3,y3)$  は、

$$\begin{bmatrix} x3 \\ y3 \\ 0 \end{bmatrix} = T_{03} \begin{bmatrix} l3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と求めることができる。以上より、ジョイントの角度から原点座標系でのエンドエフェクタの位置を求めることができた。

次にリンク長  $(l1,l2,l3)=(3,2,1)$ 、角度  $(d1,d2,d3)=(30^\circ,45^\circ,60^\circ)=(\pi/6,\pi/4,\pi/3)$  として、MATLAB で外形を出力させると以下の通りになる。



```
close all;clear all;
l1 = 3; l2 = 2; l3 = 1;
d1 = pi/6; d2 = pi/4; d3 = pi/3;
T01 = [cos(d1) -sin(d1) 0 0; sin(d1) cos(d1) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
T12 = [cos(d2) -sin(d2) 0 l1; sin(d2) cos(d2) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
T23 = [cos(d3) -sin(d3) 0 l2; sin(d3) cos(d3) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
T03 = T01 * T12 * T23;
T02 = T01 * T12;
P3 = T03 * [l3 0 0 1]';
P2 = T02 * [l2 0 0 1]';
P1 = T01 * [l1 0 0 1]';
plot([0 P1(1)], [0 P1(2)]);
hold on;
plot([P1(1) P2(1)], [P1(2) P2(2)]);
plot([P2(1) P3(1)], [P2(2) P3(2)]);
hold off;
grid;
```

## 1.6 逆運動学 (inverse kinematics)

逆運動学(inverse kinematics)とは、エンドエフェクタの位置が与えられた場合、各関節の変位を求める問題を扱うことである。順運動学の場合は、ロボットマニピュレータのジョイントの変位を与えれば同次変換行列によってエンドエフェクタの位置を求めることができた。しかし逆運動学の場合は、数式から解を直接求めることが困難な場合が多い。しかし、現状ではこの解の誘導は必要不可欠である。なぜなら通常使用されているマニピュレータは、逆運動学が解くことができる機構(mechanism)を使用しており、その逆変換を前提として制御しているからである。よって、ここでは幾何学的な関係を使った方法について考える。

## 例題

Fig.7 に示した関節ロボットアームにおいて、エンドエフェクタの位置  $P3(x3,y3)$  からジョイントの角度  $J1, J2, J3$  を求めよ。なお、リンク  $l3$  と X 軸のなす角度(エンドエフェクタの姿勢角)を  $d$  とする。また、各パラメータを適当に値を代入し、MATLAB で関節ロボットアームの外形を出力せよ。

## 解答

まず  $J3$  の座標  $P2(x2,y2)$  を求める。

$$x2 = x3 - l3 \cos(d)$$

$$y2 = y3 - l3 \sin(d)$$

したがって、Fig.8 より

$$d12 = \tan^{-1}\left(\frac{y2}{x2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y3 - l3 \sin(d)}{x3 - l3 \cos(d)}\right)$$

よって、ジョイント  $J1, J2, J3$  が作る三角形において角度  $da, db$  を求めると余弦定理より、

$$da = \cos^{-1}\left(\frac{l1^2 + l13^2 - l2^2}{2l1l13}\right)$$

$$db = \cos^{-1}\left(\frac{l1^2 + l2^2 - l13^2}{2l1l2}\right)$$

ただし  $l13$  は  $J1$  から  $J3$  の長さで、 $l13 = \sqrt{(x2)^2 + (y2)^2}$

よって、ジョイントの角度  $d1, d2, d3$  は

$$d1 = d12 \pm da$$

$$d2 = \pm(db - \pi)$$

$$d3 = d - d1 - d2$$

と求めることができる。以上より、エンドエフェクタの位置からジョイントの角度を求めることができた。

次にリンク長  $(l1, l2, l3) = (3, 2, 1)$ 、エンドエフェクタの位置  $P3(x3, y3) = (2.4, 4.1)$ 、姿勢角  $d = 3 * \pi / 4$  として MATLAB で外形を出力させると以下の通りになる。

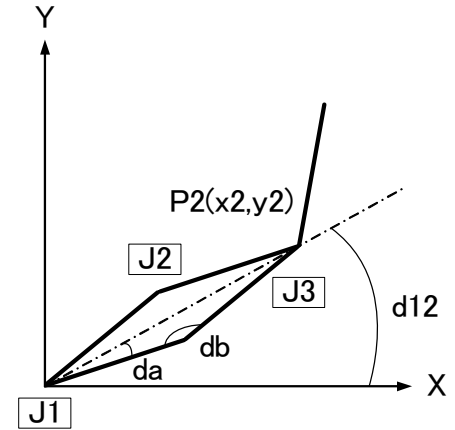
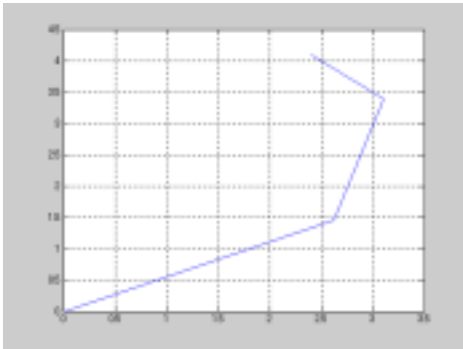


Fig.8 逆運動学問題の解法

```

close all;clear all;
l1 = 3; l2 = 2; l3 = 1;
x3 = 2.4; y3 = 4.1; d = (3*pi)/4;
x2 = x3 - l3*cos(d);
y2 = y3 - l3*sin(d);
d12 = atan(y2 / x2);
l13 = sqrt(x2^2 + y2^2);
da = acos((l1^2 + l13^2 - l2^2) / (2 * l1 * l13));
db = acos((l1^2 + l2^2 - l13^2) / (2 * l1 * l2));
d1 = d12 - da;
d2 = -db + pi;
d3 = d - d1 - d2;
%d1_1 = d12 + da;
%d2_1 = db - pi;
%d3_1 = d - d1_1 - d2_1;
P1 = l1 * [cos(d1) sin(d1)];
P2 = P1 + l2 * [cos(d1 + d2) sin(d1 + d2)];
P3 = P2 + l3 * [cos(d) sin(d)];
%P1_1 = l1 * [cos(d1_1) sin(d1_1)];
%P2_1 = P1_1 + l2 * [cos(d1_1 + d2_1) sin(d1_1 + d2_1)];
%P3_1 = P2_1 + l3 * [cos(d) sin(d)];
plot([0 P1(1)], [0 P1(2)]);
hold on;
plot([P1(1) P2(1)], [P1(2) P2(2)]);
plot([P2(1) P3(1)], [P2(2) P3(2)]);
%plot([0 P1_1(1)], [0 P1_1(2)]);
%plot([P1_1(1) P2_1(1)], [P1_1(2) P2_1(2)]);
%plot([P2_1(1) P3_1(1)], [P2_1(2) P3_1(2)]);
hold off;
grid;

```



逆運動学問題では以上のように、複数の解が存在するため、実際の作業においては運動奇跡の連続性や障害物回避などについて勘案する必要がある。

